



FORMULAÇÃO HÍBRIDA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO PARA PROBLEMAS DIFUSIVOS-ADVECTIVOS

MARKCILEI LIMA DAN¹, CARLOS FRIEDRICH LOEFFLER²

¹Coordenadoria de Eletromecânica

Centro Federal de Educação Tecnológica do Espírito Santo – Unidade de Ensino Descentralizada –
Rodovia Br-482 Cachoeiro do Itapemirim, E.S., Brasil

²Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal Do Espírito Santo

Av Fernando Ferrari, S.N., Vitória, E.S., Brasil.

(Recibido 6 de mayo de 2004, para publicación 23 de enero de 2006)

Resumo – Neste trabalho é apresentada uma formulação alternativa para a modelagem de problemas de transmissão de calor com difusão e advecção considerando escoamentos potenciais. A formulação com Quase-Dupla Reciprocidade é empregada, mas, o procedimento aqui exposto, difere do originalmente encontrado na literatura, porque a equação integral é reescrita em função de um potencial de velocidades e, desta forma, o termo advectivo é dividido em quatro parcelas. Três delas são integradas de modo tradicional e apenas uma é trabalhada de acordo com os procedimentos de interpolação da Quase-Dupla Reciprocidade. Usando elementos constantes, a solução numérica é comparada com os resultados da formulação clássica através da simulação de problemas de referência que possuem solução analítica.

Palavras chave – Método de elementos de contorno, Quase-Dupla reciprocidade, escoamentos potenciais, convecção forçada, simulação numérica.

1. INTRODUÇÃO

A formulação com Dupla Reciprocidade, proposta por Nardini e Brebbia [1], ampliou o campo de aplicação do MEC, permitindo abordar com relativa simplicidade uma série de problemas anteriormente não acessíveis às formulações mais clássicas, particularmente os casos envolvendo escoamento, convecção, ações de domínio, problemas transientes e dinâmicos. No lugar de se utilizar soluções fundamentais correlatas, a Dupla Reciprocidade usa soluções mais simples e funções auxiliares de interpolação para estabelecer uma equação integral de contorno.

A aplicação da Dupla Reciprocidade no caso difusivo-advectivo foi feita primordialmente por Partridge et al [2]. Usando uma solução fundamental difusiva e tratando as derivadas espaciais relacionadas à convecção através de uma nova interpolação, seu modelo superou as limitações das formulações clássicas precedentes, resolvendo problemas onde o campo de velocidades era variável [3]. Não obstante, seus resultados apresentaram precisão razoável apenas para baixos números de Peclet [4].

Recentemente uma nova técnica foi apresentada por Loeffler e Mansur [5], denominada de Quase-Dupla Reciprocidade. Esta formulação conseguiu bons resultados para escoamentos potenciais com médios números de Peclet. Tal desempenho motivou a continuidade das pesquisas nessa linha de formulações alternativas, empregando a mesma idéia básica da Dupla Reciprocidade, embora com pequenas alterações, doravante comentadas.

Neste trabalho, a equação integral é reescrita em termos de uma função potencial de velocidades e quatro novas integrais daí resultam. Três delas são resolvidas pelos métodos clássicos de solução numérica e apenas uma é transformada de acordo com o processo de interpolação que usa funções auxiliares típicas da Dupla Reciprocidade [6].

2. EQUAÇÃO DE GOVERNO

Considerando um volume de controle bidimensional Ω por onde flui um escoamento potencial, a equação diferencial que caracteriza o problema de transferência de calor por difusão e advecção neste meio é dada, em notação indicial einsteniana, por:

$$K\theta_{,ii} = v_i\theta_{,i} \quad (1)$$

Na equação anterior θ é a temperatura, K representa as propriedades térmicas do meio contínuo e homogêneo e v_i denota as componentes de velocidade. Os subscritos repetidos em i indicam o operador Laplaciano, de acordo com a convenção estabelecida pela notação. As condições de contorno são definidas por:

$$\theta = \bar{\theta} \quad \text{em } \Gamma_u \text{ (condição essencial)} \quad (2)$$

$$K\theta_{,i}n_i - \theta v_i n_i = \bar{f} \quad \text{em } \Gamma_q \text{ (condição natural)} \quad (3)$$

Na equação anterior, n_i representa as componentes do vetor normal unitário exterior ao contorno.

3. DUPLA RECIPROCIDADE TRADICIONAL

O ponto de partida para a formulação com Dupla Reciprocidade e outras similares pertinentes ao Método dos Elementos de Contorno consiste no desenvolvimento da forma integral inversa associada à equação (1). Com um procedimento bastante conhecido na literatura [8], baseando nas identidades de Green ou na técnica da integração por partes, lado esquerdo da equação (1) pode ser escrito como:

$$K \int_{\Omega} \theta_{,ii} u^* d\Omega = K \left[\int_{\Gamma} (qu^* - \theta q^*) d\Gamma - c(\xi)\theta(\xi) \right] \quad (4)$$

A equação (4) empregou como função auxiliar a solução fundamental difusiva $\theta^*(\xi, X)$:

$$\theta^* = (-1/2\pi) \ln r(\xi, X) \quad (5)$$

Na expressão anterior, q e q^* são as derivadas normais da temperatura e da solução fundamental respectivamente. O ponto ξ é um ponto especial do domínio e $c(\xi)$ é um valor dependente da posição deste, conforme atestam diversas referências, entre as quais Brebbia [9].

De acordo com o procedimento da Dupla Reciprocidade tradicional, considera-se o termo convectivo como uma fonte ou ação de domínio, de modo que:

$$b = v_i\theta_{,i} \quad (6)$$

Admite-se que este último termo possa ser representado por uma combinação de funções linearmente independentes F^j , na forma:

$$b \approx \alpha^j F^j = \alpha^j \Psi_{,ii}^j \quad (7)$$

Na equação anterior α^j são coeficientes constantes e Ψ^j são funções primitivas de F^j . A escolha das funções é matéria estudada em diversos trabalhos, especialmente Partridge [6]. Entre as diversas opções, destaca-se a classe das funções radiais, compostas da distância euclidiana entre os pontos do domínio X e os pontos de interpolação X^j . Considerando a aproximação dada pela equação (7), a expressão integral equivalente ao termo advectivo em escrita em termo de valores de contorno pode ser expressa como:

$$\int_{\Omega} v_i \theta_{,i} \theta^* d\Omega \approx \int_{\Omega} \alpha^j \Psi_{,ii}^j \theta^* d\Omega = \alpha^j \left[\int_{\Gamma} (\Psi_{,i}^j \theta^*)_{,i} d\Gamma - \int_{\Gamma} (\Psi^j \theta_{,i}^*)_{,i} d\Gamma - c(\xi) \Psi^j(\xi) \right] \quad (8)$$

Efetuando procedimentos bem tradicionais como a discretização do contorno, que pode ser achada em muitos textos clássicos [10], pode-se escrever:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{G}\mathbf{Q} = [\mathbf{H}\boldsymbol{\Psi} - \mathbf{G}\mathbf{N}]\mathbf{F}^{-1}\mathbf{V}_i\boldsymbol{\theta}_{,i} = \mathbf{P} \quad (9)$$

Na equação anterior aparecem as matrizes difusivas \mathbf{H} e \mathbf{G} ; a inversa da matriz \mathbf{F} , composta das funções de interpolação; matrizes de funções auxiliares $\boldsymbol{\Psi}$ e \mathbf{N} ; uma matriz diagonal composta das velocidades \mathbf{V}_i e finalmente um vetor relacionado às derivadas espaciais $\boldsymbol{\theta}_{,i}$. Daqui por diante é feito o tratamento das derivadas espaciais. A proposta contida na Dupla Reciprocidade tradicional consiste em fazer uma nova interpolação no campo de temperaturas, na forma:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} \quad (10)$$

A equação (10) pode ser derivada e utilizada para determinar os coeficientes $\boldsymbol{\beta}$, resultando em uma nova equação que é empregada para eliminar as derivadas direcionais:

$$\boldsymbol{\theta}_{,i} = \mathbf{F}_{,i}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\theta} \quad (11)$$

Deste modo, pode-se finalmente escrever uma equação matricial definitiva:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{G}\mathbf{Q} = [\mathbf{H}\boldsymbol{\Psi} - \mathbf{G}\mathbf{N}]\mathbf{F}^{-1}\mathbf{V}_i\mathbf{F}_{,i}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \quad (12)$$

O procedimento é engenhoso, mas introduz uma aproximação adicional àquela tradicional para representar termos fonte ou ações de inércia e daí resulta o seu baixo desempenho nos problemas em que o fenômeno advectivo é preponderante.

4. FORMULAÇÃO QUASE-DUAL HÍBRIDA

A formulação com Quase-Dupla Reciprocidade requer a transformação da equação (1), na forma apresentada abaixo, com base na condição de incompressibilidade do escoamento:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\theta}_{,ii} = (\mathbf{v}_i\boldsymbol{\theta})_{,i} \quad (13)$$

Do mesmo modo, deve-se escrever uma forma integral associada à equação anterior:

$$\mathbf{K} \int_{\Omega} \boldsymbol{\theta}_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{v}_i\boldsymbol{\theta})_{,i} u^* d\Omega \quad (14)$$

O lado esquerdo da equação (14) pode ser facilmente operacionalizado. No tratamento do lado direito reside todo o cerne da proposição deste trabalho. Deste modo, usando a técnica de integração por partes e o teorema da divergência, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v}_i\boldsymbol{\theta})_{,i} \theta^* d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{v}_i n_i \theta \theta^* d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{v}_i \theta \theta^*_{,i} d\Omega \quad (15)$$

Considerando um potencial de velocidades Φ , sua substituição na equação anterior fornece:

$$\int_{\Omega} \Phi_{,i} \theta \theta^*_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} \Phi \theta q^* d\Gamma - \int_{\Omega} \Phi \theta \theta^*_{,ii} d\Omega - \int_{\Omega} \Phi \theta_{,i} \theta^*_{,i} d\Omega \quad (16)$$

Usando a solução fundamental difusiva e as propriedades da função Delta de Dirac, tem-se:

$$\int_{\Omega} \Phi \theta \theta^*_{,ii} d\Omega = -c(\xi)\Phi(\xi)\theta(\xi) \quad (17)$$

O próximo passo é o tratamento do terceiro termo no lado direito da equação (16). O propósito é transformar a integral de domínio em uma integral de contorno. Fazendo a seguinte aproximação:

$$\mathbf{b}_i = \Phi \theta_{,i} \approx \alpha_p^i \Psi_{p,i}^j = \alpha_p^j \eta_{pi}^j \quad (18)$$

Substituindo-a na equação (16) e integrando por partes, resulta em:

$$\int_{\Omega} \Phi \theta_{,i} \theta_{,i}^* d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Omega} \Psi_{p,i}^j \theta_{,i}^* d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Omega} [\Psi_{p,i}^j \theta_{,i}^*]_{,i} d\Omega + \alpha_p^j \int_{\Omega} \Psi_{p,ii}^j \theta_{,i}^* d\Omega \quad (19)$$

Através do Teorema da Divergência e das propriedades da distribuição delta de Dirac, tem-se:

$$\int_{\Omega} \Phi \theta_{,i} \theta_{,i}^* d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Gamma} \Psi_{p,i}^j q^* d\Gamma - \alpha_p^j c(\xi) \psi(\xi) \quad (20)$$

A expressão completa fica:

$$K \left\{ c(\xi) \theta(\xi) + \int_{\Gamma} [\theta q^* - q \theta^*] d\Gamma \right\} = - \int_{\Gamma} v_i n_i \theta \theta^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \Phi \theta q^* d\Gamma + c(\xi) \Phi(\xi) \theta(\xi) - \alpha_p^j \left[\int_{\Gamma} \Psi_{p,i}^j q^* d\Gamma + c(\xi) \Psi_{p,i}^j(\xi) \right] \quad (21)$$

A equação precedente pode ser discretizada segundo os procedimentos usuais do MEC, resultando:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{B}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{H}\Phi\boldsymbol{\theta} = -\frac{1}{K} \mathbf{H}\Psi\boldsymbol{\eta}^{-1} [\Phi\boldsymbol{\theta}_{,i}] \quad (22)$$

Onde a eliminação do vetor de coeficientes α foi feita considerando:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\eta}^{-1} [\Phi\boldsymbol{\theta}_{,i}] \quad (23)$$

Para se eliminar a derivada espacial que aparecem na equação anterior, usa-se o mesmo esquema adotado pela formulação tradicional (equação (10)), isto é:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} \quad (24)$$

Derivando-se esta equação tem-se:

$$\boldsymbol{\theta}_{,i} = \mathbf{F}_{,i} \boldsymbol{\beta} \quad (25)$$

Obtendo-se $\boldsymbol{\beta}$ da equação (24), são facilmente calculadas as derivadas direcionais:

$$\boldsymbol{\theta}_{,i} = \mathbf{F}_{,i} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\theta} \quad (26)$$

A forma matricial completa escreve-se como:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{B}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{H}\Phi\boldsymbol{\theta} = -(\mathbf{H}\Psi \boldsymbol{\eta}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{F}_{,i} \mathbf{F}^{-1}) \boldsymbol{\theta} \quad (27)$$

De modo ainda mais compacto, pode-se escrever:

$$[\mathbf{H} + \mathbf{B} - \mathbf{S} - \mathbf{M}] \boldsymbol{\theta} = \mathbf{G}\mathbf{Q} \quad (28)$$

5. EXEMPLOS

Os exemplos discutidos a seguir mostram os resultados obtidos pela formulação com Dupla Reciprocidade tradicional (TDR) e a formulação proposta (HQDR). Para ambas as abordagens, os resultados numéricos são comparados com as soluções analíticas.

5.1. Primeiro Exemplo: Escoamento Unidimensional

O primeiro exemplo consiste em um problema cujo domínio é constituído por um volume de controle quadrado, onde são prescritas temperaturas nas faces verticais, com fluxo de calor nulo nas arestas horizontais e com campo de velocidade unidimensional e constante, conforme mostra a Fig. 1.

Neste exemplo, a solução analítica para o campo de temperaturas é dada pela equação (29), enquanto o valor da derivada normal na face vertical direita expressa-se pela equação (30). Em ambas as equações, p corresponde ao número de Peclet.

$$\theta = \frac{e^{px} - 1}{e^{p^1} - 1} \quad (29)$$

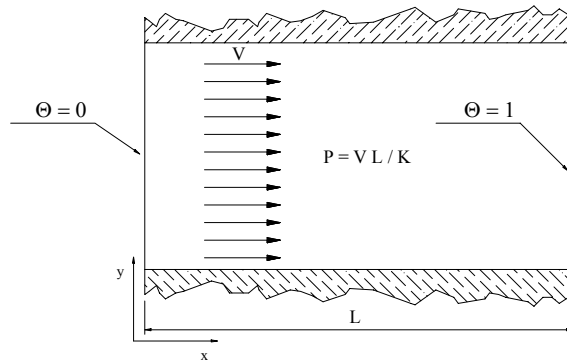


Fig. 1. Características físicas e geométricas do primeiro exemplo.

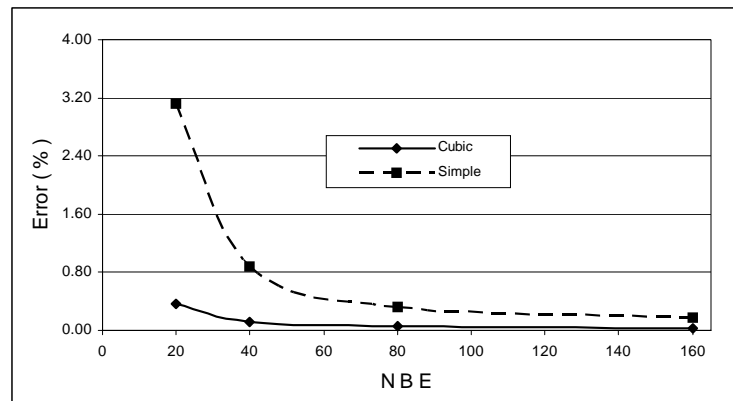


Fig. 2. Desempenho das funções interpolantes radiais no cálculo de temperaturas.

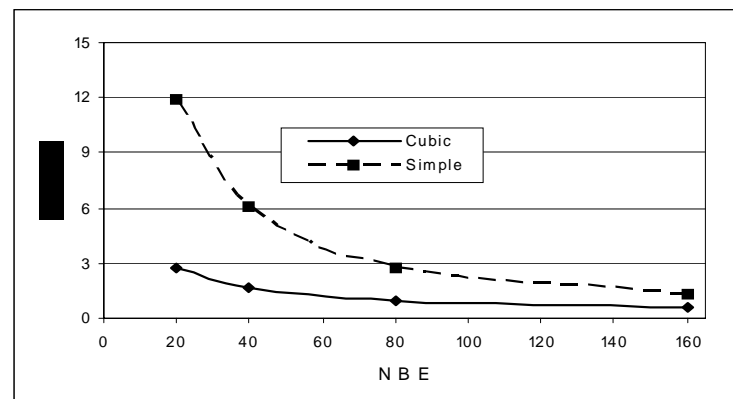


Fig. 3. Desempenho das funções interpolantes radiais no cálculo de derivadas.

$$q = \frac{p e^{px}}{e^{p^l} - 1} \tag{30}$$

No primeiro teste é avaliado o desempenho formulação HQRD, para diferentes conjuntos de funções utilizadas para interpolar as derivadas espaciais do campo de temperatura (equação (26)).

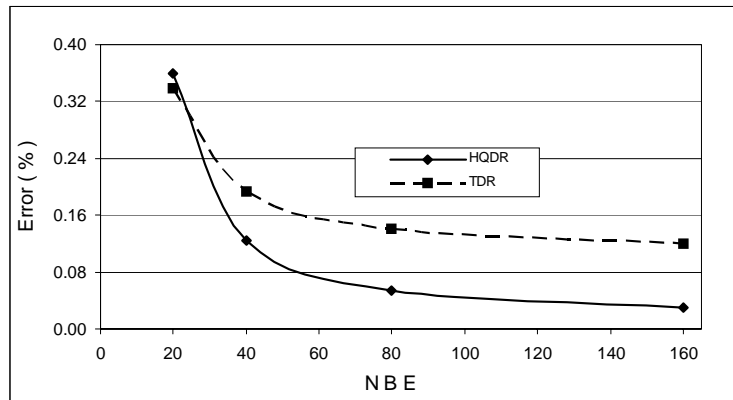


Fig. 4. Influência do refinamento da malha no cálculo das temperaturas.

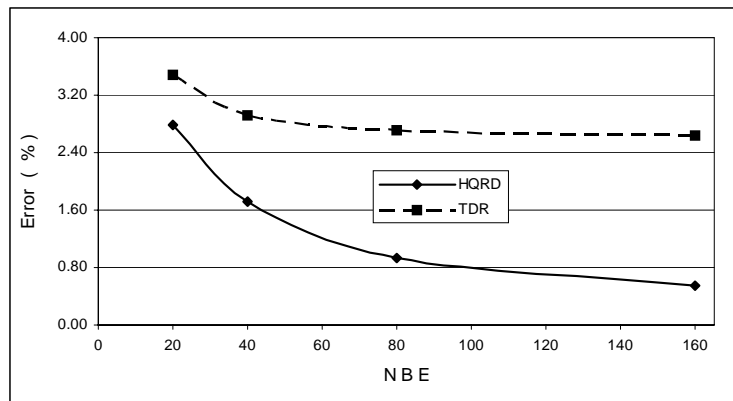


Fig. 5. Influência do refinamento da malha no cálculo das derivadas.

Nas Fig. 2 e 3 são apresentados gráficos onde pode ser verificado que as funções radiais cúbicas ($F^j = r^3$) apresentam desempenho muito superior ao das funções radiais simples ($F^j = r$). Nas simulações realizadas, são empregadas malhas regulares compostas por 20, 40, 80 e 160 elementos de contorno constantes. Estes gráficos correspondem ao erro médio percentual obtido no processamento numérico para o cálculo de temperaturas, com diferentes malhas e com número de Peclet igual a dois.

No segundo teste, é comparado o desempenho da Formulação HQDR com o da TDR, nas mesmas condições prévias de simulação: Número de Peclet e número de elementos de contorno da malha utilizada na simulação. É importante notar que no modelo da Dupla Tradicional são empregados 16 pontos internos interpolantes (pólos) para melhorar os resultados, enquanto que na HQDR não foi necessário o uso de pólos para se obter melhoras nos resultados. As Fig. 4 e 5 apresentam as curvas de erro médio percentual decorrente do processamento numérico para o cálculo de temperatura nas faces horizontais e para o cálculo das derivadas normais nas faces verticais. Ambos os gráficos mostram que o desempenho de formulação de HQDR é superior ao da TDR. Os resultados apresentados correspondem a um número de Peclet igual a 2.

O último teste realizado para este exemplo ilustra o desempenho das formulações TDR e HQDR com a variação do número de Peclet. Nas simulações realizadas foram utilizadas malhas constituídas de 160 elementos de contorno constantes. As Fig. 6 e 7 apresentam o erro médio percentual obtido no processa-

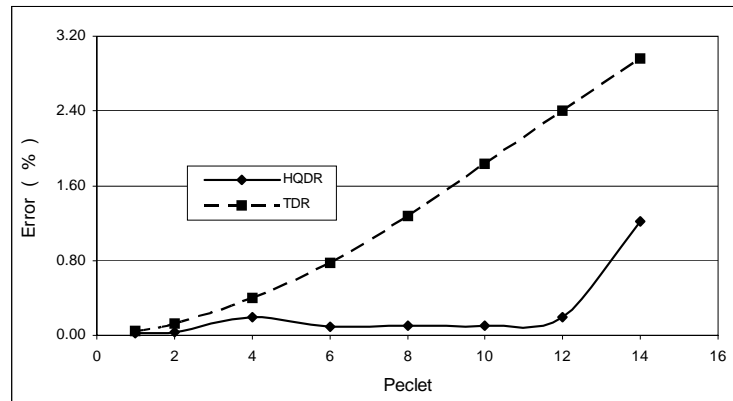


Fig. 6. Influência do número de Peclet no cálculo das temperaturas.

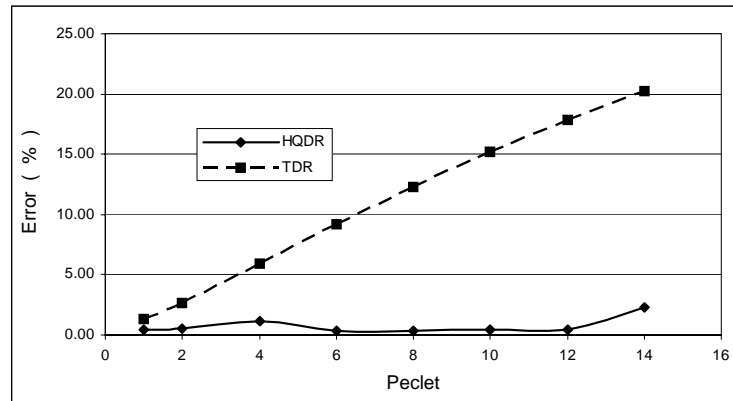


Fig. 7. Influência do número de Peclet no cálculo das derivadas

mento numérico para o cálculo das temperaturas e das derivadas, para diferentes números de Peclet. Nota-se a qualidade superior dos resultados da HQDR.

Com relação ao tempo computacional, foi gasto aproximadamente 1,5 segundos na simulação numérica com a malha de 160 elementos de contorno, empregando um microcomputador do tipo Pentium 4, com 1.7 GHz e 512 Mbytes de memória RAM.

5.2. Segundo Exemplo: Escoamento Bidimensional

O segundo exemplo analisado corresponde a um problema bidimensional, onde o campo de velocidade é gerado por duas componentes vetoriais segundo as direções x e y , sendo estas componentes constantes nas duas direções. Figura 8 apresenta as características físicas e geométricas deste problema.

Apenas as temperaturas são prescritas no contorno do volume de controle, sendo dadas pela expressão:

$$\theta = e^{vx+wy} \quad (31)$$

Por simplicidade, as velocidades v e w foram admitidas iguais. As Fig. 9 e 10 apresentam os valores de erro médio percentual obtidos no cálculo de temperaturas e de derivadas respectivamente, em simulações realizadas com as formulações TDR e HQDR, para malhas com diferentes números de elementos de contorno e com número de Peclet igual a dois. Novamente, para as simulações realizadas com TDR foi necessário o uso de 16 pólos interpolantes para se obter melhores resultados.

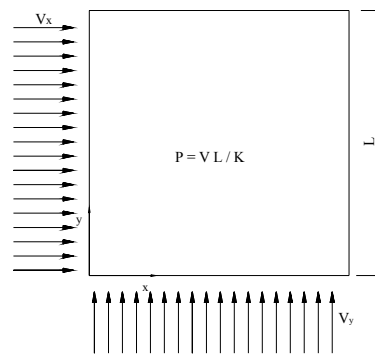


Fig. 8. Características do volume de controle do segundo exemplo.

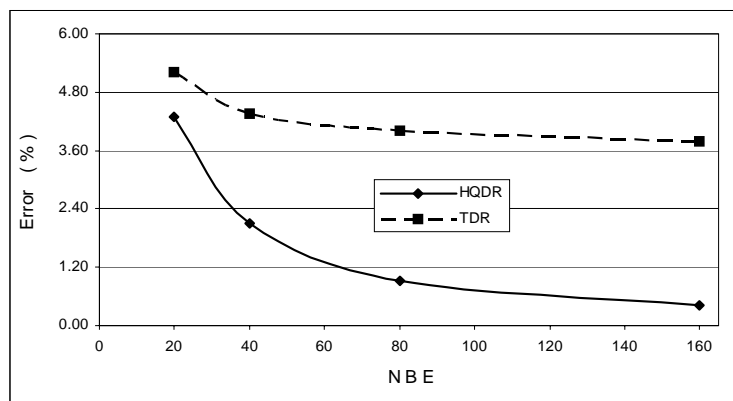


Fig. 9. Influência do refinamento da malha no cálculo das derivadas na face horizontal inferior.

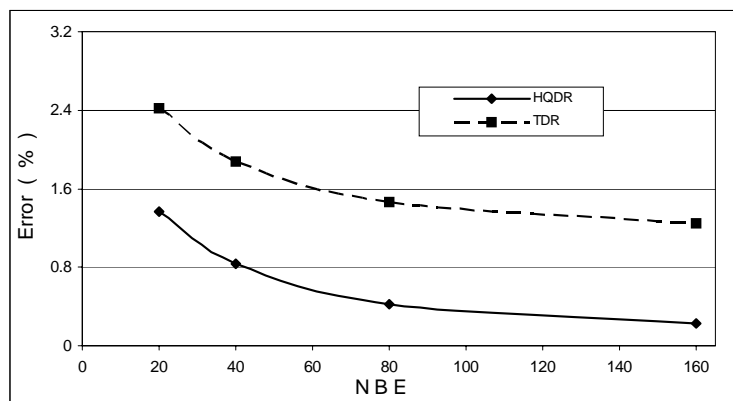


Fig. 10. Influência do refinamento da malha no cálculo das derivadas na face vertical direita.

Pode ser percebido o melhor desempenho da formulação HQDR. Embora os resultados na face vertical sejam mais significativos, os erros cometidos junto à face horizontal é maior. Isto pode ser explicado devido à dificuldade que as interpolações globais têm para representar valores em todo o domínio quando há diferenças acentuadas na ordem de grandeza destes. Felizmente, os valores mais altos são melhor representados. Para o próximo teste, uma malha mais refinada, constituída de 160 elementos de contorno constantes, é utilizada para avaliar o desempenho das formulações com diferentes números de Peclet. Fig. 11 e 12 mostram estes resultados:

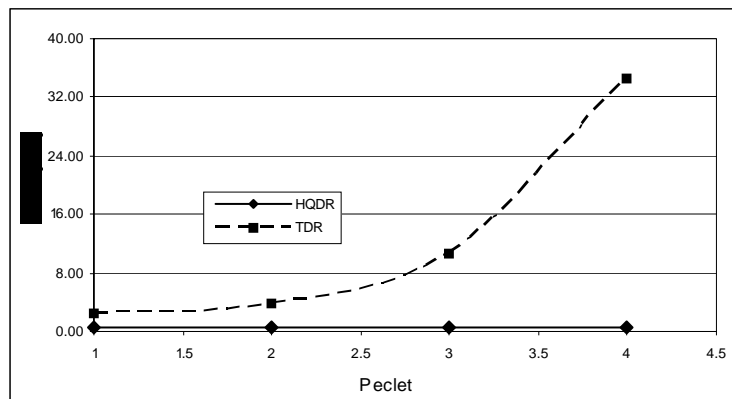


Fig. 11. Influência do número de Peclet no cálculo das derivadas na face horizontal inferior.

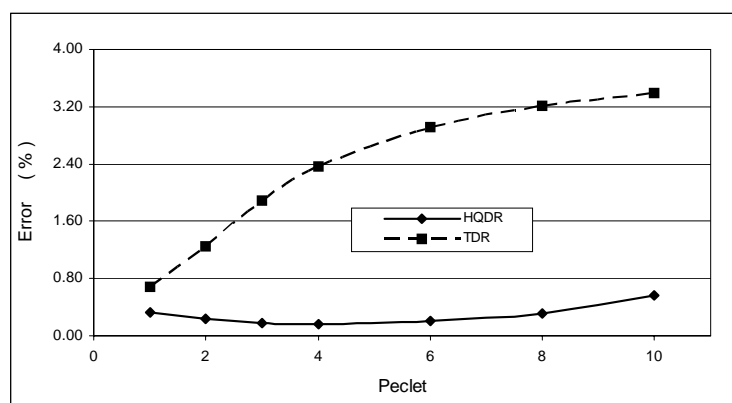


Fig. 12. Influência do número de Peclet no cálculo das derivadas na face vertical direita.

Soluções numéricas precisas para problemas bidimensionais são muito mais difíceis de alcançar do que nos casos unidimensionais. Especialmente para TDR, os resultados na face horizontal não apresentam precisão satisfatória, por causa da dificuldade apresentada pelas interpolações globais em representar funções que apresentam grandes gradientes, conforme mencionado anteriormente. Porém, apesar disso, pode ser visto que a HQDR manteve os valores de erro em níveis aceitáveis. Com relação ao dispêndio computacional, neste caso bidimensional foi gasto um tempo comparativamente maior do que no exemplo precedente, por causa da forma diádica das funções auxiliares. Consumiu-se cerca de 2,5 segundos na simulação numérica com a malha de 160 elementos de contorno, empregando um microcomputador do tipo Pentium 4, com 1.7 GHz e 512 Mbytes de memória RAM.

6. CONCLUSÕES

A idéia de se reescrever a equação integral desdobrando o termo convectivo em quatro parcelas foi bastante bem sucedida, pois foram obtidos resultados melhores do que aqueles conseguidos com a formulação com TDR. A comparação da formulação proposta com esta última é importante porque ambas usam uma interpolação específica para eliminar as derivadas espaciais da temperatura. No entanto, na HQDR esta aproximação envolve apenas um dos quatro termos advectivos, enquanto na formulação tradicional esta aproximação interfere de maneira mais completa. É importante ressaltar que a HQDR não requer os pólos interpolantes. Este fato significa naturalmente uma redução do custo computacional e ausência de

preocupação por parte do usuário com outro fator que não o refinamento da malha no controle da precisão dos resultados.

REFERÊNCIAS

- [1] D.Nardini y C. A. Brebbia, “A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements”, *Proceedings of the Fourth International Seminar, Boundary Element Methods in Engineering*, Southampton (1982)
- [2] P. W. Partridge, C. A. Brebbia y L. C. Wrobel, *The Dual Reciprocity, Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications and Elsevier, London (1992)
- [3] P.A. Ramachandran, *Boundary Element Methods in Transport Phenomena*, Computational Mechanics Publication and Elsevier Applied Science, London (1994)
- [4] C. A. M. Massaro y C. F. Loeffler, “Boundary Element Formulation Applied to Solution of Convective-Diffusive Heat Transfer Problems”. *Anais do XVI COBEM* (em CD ROM), Uberlândia (2001)
- [5] C. F. Loeffler y W. J. Mansur “Quasi-Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Incompressible Flow: Application to the Diffusive-Advection Equation”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , **58** (8), 1167-1186 (2003)
- [6] P. W. Partridge, New Developments in the Dual Reciprocity Method. *BEM XVII*, 11-18 (1995)
- [7] P. A. Ramachandran, *Boundary Element Methods in Transport Phenomena*, Computational Mechanics Publication and Elsevier Applied Science, London (1994)
- [8] C. A. Brebbia, *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London (1978)
- [9] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles y L. C. Wrobel, *Boundary Element Techniques Theory And Applications In Engineering*, Springer-Verlag, New York (1984)
- [10] C. A. Brebbia y S. Walker, *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes Butterworths, UK (1980)

HYBRID BOUNDARY ELEMENT FORMULATION TO DIFFUSIVE-ADVECTIVE PROBLEMS

Abstract – In this work an alternative boundary formulation to convective heat transfer for potential fluid flow is presented. The recent Quasi-Dual approach is used, but the main purpose is to rewrite the governing integral equation in terms of the potential velocity function and to divide the advective integral in four terms. Three of them are integrated without approximations and the last one is transformed according to the Quasi-Dual formulation procedure. Using constant boundary elements, the numerical solution of one and two-dimensional problems is shown and these results are compared with traditional Dual Reciprocity formulation results and analytical ones.

Keywords – Boundary Element Method, Quasi-Dual reciprocity, potential flow, diffusive-advective problems, numerical simulation.